COMPOSITION DE MATHEMATIQUES OPTION M

Temps accordé : 4 heures

(4 pages)

- Si f est une application d'un ensemble E dans lui même, $f \circ f$ sera noté f^2 et par récurrence $f^{n-1} \circ f$ sera noté f^n. Si de plus, f est bijective, $(f^{-1})^n$ sera notée f^{-n}, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$.
- $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des fonctions réelles continues sur le segment $[0, 1]$.
- Dans un espace préhilbertien réel E où le produit scalaire de deux vecteurs est noté $\langle X, Y \rangle$, le sous-espace orthogonal d'un sous-espace F, noté $F^{\perp}$, est l'ensemble des éléments Y de E tels que, $\forall X \in F$, $\langle X, Y \rangle = 0$.
- Un endomorphisme f de E est dit "symétrique" si et seulement si :

$$\forall (X, Y) \in E^2 : \quad \langle f(X), Y \rangle = \langle X, f(Y) \rangle.$$

- Un projecteur p d'un espace vectoriel E est un endomorphisme de E vérifiant $p^2 = p$.
- Si E est préhilbertien réel, p est un projecteur orthogonal si et seulement si on a $\operatorname{Ker} p = (\operatorname{Im} p)^{\perp}$.

PREMIERE PARTIE

I- 1 Montrer que pour toute fonction f, élément de $\mathcal{F}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} dx$ est convergente.

I- 2 On considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx$ où n est un élément de $\mathbb{N}$. Etudier la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$

I- 3 Donner une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}, pour $n \geq 1$. En déduire la nature de la série de terme général $v_n = \ln(I_n) - \ln(I_{n-1})$ (pour $n \geq 1$), puis la limite de I_n pour n tendant vers $+\infty$.

I- 4 On considère les deux suites $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $J_n = \sqrt{n}\, I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1}\, I_n$.

Utiliser la relation de récurrence de la question I.3 pour montrer que les deux suites $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire qu'il existe un réel α strictement positif, tel que, pour n tendant vers $+\infty$, I_n est équivalent à $\frac{\alpha}{\sqrt{n}}$.

I- 5 Utiliser encore la relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} (pour $n \geq 1$) pour écrire une expression de I_n qui utilise des "factorielles". On admettra la formule de Stirling : $\lim_{n \to +\infty} \left(n! e^n n^{-n-\frac{1}{2}} \right) = \sqrt{2\pi}$.

Déterminer alors un équivalent simple de I_n, pour n tendant vers $+\infty$, et en déduire la valeur du réel α introduit au I.4

I- 6 On considère la suite double $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ définie par $u_{p,q} = \int_0^1 \frac{x^p (1-x)^q}{\sqrt{1-x}} dx$. Pour $p \geq 1$, trouver une relation de récurrence entre $u_{p,q}$ et $u_{p-1,q+1}$ et en déduire l'expression de $u_{p,q}$ en fonction de p et q.

DEUXIEME PARTIE

Dans toute la suite $\mathbb{R}[X]$ (espace vectoriel des polynômes à coefficients réels) sera noté E et le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n sera noté E_n. On confondra les notions de polynôme et de fonction polynôme asssociée.

II- 7 On considère l'application $\Phi : E^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P, Q) = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x}}dx$.

Démontrer que Φ est un produit scalaire sur E.

On notera alors $\Phi(P, Q) = <P, Q>$ et la norme associée : $\sqrt{<P,P>} = \|P\|$. pour P∈ E.
Dans toute la suite du problème, E sera ainsi muni d'une structure d'espace préhilbertien réel.

II- 8 Montrer que pour tout polynôme A, élément de E, l'application φ_A de E dans E définie par $\varphi_A(P) = AP$ est un endomorphisme symétrique de E.

II- 9 On sait construire, par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les trois propriétés :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \|P_n\| = 1,$

(ii) $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \ p \neq q, \ \langle P_p, P_q \rangle = 0,$

(iii) Le degré de P_n est n, et le coefficient du terme de degré n est positif.

On se propose, au terme de cette partie, de prouver l'existence de cette suite par une méthode différente, utilisant des projecteurs orthogonaux.
Pour tout polynôme A, non nul, de E, on considère l'application r_A qui, à tout polynôme P, associe son reste dans la division euclidienne par A. Ce reste sera noté $r_A(P)$.
a) Démontrer que r_A est un projecteur de E. Quelle est l'image de r_A ?
Quel est le noyau de r_A ? (On notera $\mathrm{Im}(r_A)$ et $\mathrm{Ker}(r_A)$).
b) Montrer que si le degré de A n'est pas nul, r_A n'est pas un projecteur orthogonal de E. (Utiliser le fait que φ_A est symétrique).

II- 10 Soit maintenant $A \in E_n$, A toujours différent de 0. Soit r'_A la restriction de r_A à E_n et a le degré de A.

a) Montrer que si $0<a<n$, alors r'_A n'est pas un projecteur orthogonal de E_n.

b) On suppose que $a = n$. Préciser $\mathrm{Im}(r'_A)$ et $\mathrm{Ker}(r'_A)$. En déduire qu'il existe un unique polynôme A tel que $\|A\| = 1$, dont le coefficient du terme de degré n est positif et tel que r'_A est un projecteur orthogonal de E_n.

II- 11 **a)** En déduire l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés (i) (ii) et (iii).

b) Calculer P_0 et P_1.

II- 12 **a)** Démontrer que : $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-2$ on a : $\langle r_{P_n}(P_{n+1}), P_k \rangle = 0$

b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, il existe trois réels : u_n, v_n, w_n, que l'on ne cherchera pas à préciser tels que $P_{n+1}(X) = (u_n X + v_n).P_n(X) + w_n.P_{n-1}(X)$.

TROISIEME PARTIE

III- 13 On considère l'application Ψ qui, à tout élément f de $\mathcal{F}$ associe $\Psi(f)$ définie par $\Psi(f)(x) = \sqrt{1-x}\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1-t}}\,dt$.

a) Montrer que Ψ est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

b) Ψ est-il injectif ?

III- 14 a) Démontrer que la restriction de Ψ à E induit un endomorphisme de E.

b) Pour $P \in E$, $P \neq 0$, on appelle $a_n X^n$ le terme de plus haut degré de P. Déterminer le degré de $\Psi(P)$, ainsi que son terme de plus haut degré en fonction de n et de a_n. On pourra d'abord calculer, pour $p \in \mathbb{N}$, l'image par Ψ de $(1-X)^p$ notée $\Psi\left((1-X)^p\right)$ et utiliser la famille $\{1, 1-X, \ldots, (1-X)^n\}$.

c) Démontrer que, $\forall n \geq 1$, $\Psi^n(E)$ (image de E par Ψ^n) est l'ensemble des polynômes de E divisibles par $(1-X)^n$. Cet ensemble pourra être noté $(1-X)^n.E$.

Dorénavant, nous ne considérerons Ψ que comme application de E dans $\Psi(E) = (1-X).E$.

III- 15 Soit P un élément de $\Psi(E)$. On pose $g(x) = \frac{P(x)}{\sqrt{1-x}}$. Montrer que $\Psi^{-1}(P)$ existe et

$\Psi^{-1}(P)(x) = -\sqrt{1-x}\,g'(x)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \Psi^n(E)$, donner une expression simple de $\Psi^{-n}(P)$ qui utilise la dérivée $n^{\text{ième}}$ de g.

III- 16 Démontrer que, pour $P \in \Psi(E)$, une racine multiple d'ordre k de P est racine d'ordre k-1 de $\Psi^{-1}(P)$.

III- 17 a) Démontrer la formule : $\forall (P, Q) \in E^2 : \langle P, Q\rangle = Q(0).\langle 1, P\rangle + \langle Q', \Psi(P)\rangle$.

b) En déduire la propriété : $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall P \in E$, $P \in (E_{n+1})^{\perp} \Leftrightarrow \begin{cases} \langle 1, P\rangle = 0 \\ \Psi(P) \in (E_n)^{\perp}. \end{cases}$

c) Exprimer, pour $P \in \Psi(E)$, $\langle 1, \Psi^{-1}(P)\rangle$ en fonction de $P(0)$.

III- 18 Soit le polynôme $A(X) = X(1-X)$. On considère pour chaque entier n, le polynôme $H_n = \Psi^{-n}(A^n)$.

a) Quel est le degré de H_n ?

b) Pour $n \geq 1$, H_n appartient-il à $(E_{n-1})^{\perp}$?

c) Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \neq q$, quelle est la valeur de $\langle H_p, H_q\rangle$?

d) Montrer qu'il existe une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^+$ telle que, pour tout entier n, $H_n = \alpha_n P_n$, où $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de polynômes définie à la partie II.

III- 19 a) Démontrer l'égalité : $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\|H_n\|^2 = n! \prod_{k=0}^{n-1}\left(n+k+\frac{1}{2}\right).\langle 1, A^n\rangle$.

b) En utilisant le résultat du I.6 montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\alpha_n = \frac{n!}{\sqrt{2n+\frac{1}{2}}}$.

c) Quel est, pour tout n entier, le terme de plus haut degré de P_n ?
En déduire la valeur du coefficient u_n introduit au II.12.b.